Իրական անալիզի մեթոդները կիրառական հավանականությունների տեսության մեջ (21AG-1A45)

ղեկ.՝ Գ. Կարագուլյան

ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Ամենամյա ամփոփիչ զիտաժողով-2025

Օրթոգոնալ համակարգեր

Սահմանում:

Ֆունկցիաների $\{\phi_n\} \subset L^2(a,b)$ համակարգը կոչվում է օրթոնորմավորված, եթե

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{եթե} \quad n = m, \\ 0 & \text{եթե} \quad n \neq m: \end{cases} \tag{1}$$

Օրթոգոնալ համակարգի նախնական կարևոր հատկությունները

Թեորեմ 1

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$ շարքը զուգամիտում է f ֆունկցիային L^2 մետրիկայով, ապա

$$a_n = a_n(f) = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx,$$

որոնց անվանում են Ֆուրիեի գործակիցներ, իսկ շարքին՝ f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը:

Թեորեմ 2

Եթե ՕՆՀ-ը լրիվ է, ապա տեղի ունի նաև հակառակ պնդումը. յուրաքանչյուր L^2 դասի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք զուգամիտում է իրեն L^2 մետրիկայով:

Մինիմալության հատկությունը

Եթե $f \in L^2$, ապա n-րդ կարգի

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$$

օրթոգոնալ գումարներով f-ի լավագույն մոտարկումը ստացվում է, երբ a_k-երը f-ի Ֆուրիեի գործակիցներ են:

ՕՆՀ-ի օրինակներ

- Եռանկյունաչափական
- Ուոլշի
- Հաարի
- Ֆրանկլինի
- Սփլայն համակարգեր
- Վեյվլետ համակարգեր
- Մարտինգալ տարբերություն համակարգեր
- Զրոյական միջիններով անկախ պատահական մեծություններ

Զուգամիտության համակարգ

Սահմանում

$\{\phi_n\}$ *ՕՆ համակարգը անվանում են զուգամիտության համակարգ, եթե*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \text{ զուգամիտում է համարյա ամենուրեք}$$

Մենշովի օրինակը

Թեորեմ (Մենշով, 2023)

Գոյություն ունի ՕՆ համակարգ, որը զուգամիտության համակարգ չէ

Դասական համակարգեր

Հայտնի է, որ բոլոր վերոհիշյալ համակարգերը զուգամիտության համակարգեր են:

Հաար, Ֆրանկլին, սփլայն և վեյվլետ տիպի համակարգերի զուգամիտության լինելը հետևում է Լեբեգի թեորեմից:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f = f(x) \text{ համարյա ամենուրեք}$$

Լուզինի խնդրի լուծումը

Թեորեմ (Կարլեսոն, 1966)

Եռանկյունաչափական համակարգը զուգամիտության համակարգ է:

Թեորեմ (Բիլլարդ, 1968)

Ուոլշի համակարգը զուգամիտության համակարգ է:

Ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգ

Սահմանում

$\{\phi_n\}$ ՕՆ համակարգը անվանում են ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգ, եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

զուգամիտում է համարյա ամենուրեք շարքի անդամների կամայական դասավորության դեպքում:

Զազրսկու թեորեմը

Թեորեմ (Զազրսկի, 1962)

Եռանկյունաչափական համակարգը ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգ չէ:

Օգտագործելով Զազրսկու ապացույցի մոտեցումը, 1964 թ Ուլյանովը ցույց տվեց, որ Հաարի և Ուոլշի համակարգերը նույնպես չեն հանդիսանում ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգ:

Օլևսկու թեորեմը

Թեորեմ (Օլևսկի, 1964)

Կամայական լրիվ ՕՆ համակարգ ոչ պայմանական զուգամիտության համակարգ չէ:

Վեյլի բազմապատկիչ

Սահմանում

Կասենք, որ $w(n) \nearrow \infty$ *թվային հաջորդականությունը համարյա ամենուրեք զուգամիտության Վեյլի բազմապատկիչ է (կարճ Վեյլի բազմապատկիչ)* Φ *համակարգի համար, եթե*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \text{ համարյա ամենուրեք զուգամետ է:}$$

Կասենք, որ $w(n)$*-ը ոչ պայմանական զուգամիտության Վեյլի բազմապատկիչ է (*UC*-բազմապատկիչ), եթե նման շարքերը համարյա ամենուռեք զուգամետ են անդամների կամայական վերադասավորության դեպքում;*

$w(n) \equiv 1$ դեպքում ստացվում է զուգամիտության համակարգ:

Մենշով-Ռադեմախերի թեորեմը

Թեորեմ (Մենշով-Ռադեմախեր, 1923)

$w(n) = \log^2 n$ հաջորդականությունը հանդիսանում է Վեյլի բազմապատկիչ ցանկացած $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ օրթոնորմավորված համակարգի համար: Այսինքն՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \text{ համարյա ամենուրեք զուգամետ է:} \qquad (2)$$

Մենշովի հակաօրինակը

Թեորեմ (Մենշով, 1923)

Յուրաքանչյուր $w(n) = o(\log^2 n)$ *հաջորդականության համար գոյություն ունի այնպիսի* $\Phi = \{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *օրթոնորմավորված համակարգ, որի համար* $w(n)$*-ն Վեյլի բազմապատկիչ չէ: Ավելին գոյություն ունի*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \tag{3}$$

շարք, որը փարամետր է համարյա ամենուրեք, բայց նրա գործակիցները բավարարում են

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty. \tag{4}$$

պայմանին:

Ուլյանովի թեորեմը

Թեորեմ (Ուլյանով, 1964)

Որպեսզի $w(n)$ չնվազող հաջորդականությունը լինի UC*-բազմապատկիչ Հաարի համակարգի համար, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nw(n)} < \infty. \tag{5}$$

Այս թեորեմի արդյունքները հետագայում ընդհանրացվել են այլ վեյվելետային համակարգերի համար: Գևորգյանի աշխատանքներում ապացուցվել են թեորեմների անալոգները Ֆրանկլինի և Չիսելսկու համակարգերի համար, իսկ կամայական վեյվլետային համակարգերի համար այդ արդյունքը ստացվել է Կամոնտի և Կարագուլյանի համատեղ աշխատանքում 2023թ.: Ավելին այդ աշխատանքը առաջարկում է նոր մոտեցում, որը թույլ է տալիս պնդել Ուլյանովի թեորեմի անալոգը ընդհանուր վեյվլետային համակարգով փոխադարձաբար չհատվող բազմանդամային համակարգերի համար (մանրամասնությունները ներքևում):

Նիկիշին-Ուլյանովի թեորեմը

Թեորեմ (Նիկիշին-Ուլյանով, 1966)

Որպեսզի Հաարի շարքը լինի համարյա ամենուրեք ոչ պայմանական զուգամետ անհրաժեշտ է ու բավարար, որ այն լինի համարյա ամենուրեք բացարձակ զուգամետ:

Վեյվլեթային համակարգեր

Թեորեմ (Կամոնտ-Կարագուլյան, 2023)

Ուլյանովի թեորեմի պնդումը ճիշտ է կամայական $\{f_n\}$ վեյվլեթային համակարգերի համար: Ավելին, այն ճիշտ է կամայական

$$P_n(x) = \sum_{k \in G_n} a_k f_k$$

բազմանդամային օրթոնորմավորված համակարգերի համար: Այստեղ G_k-երը բնական թվերի փոխադարձաբար չհատվող բազմությունների հաջորդականություն է:

Anna Kamont and Grigori A. Karagulyan, On wavelet polynomials and Weyl multipliers, J. Anal. Math. 150 (2023), no. 2, 529–545.

Եթե վերցնենք մասնավոր դեպք, երբ $G_k = \{k\}$, կստանանք Հաարի, Ֆրանկլինի, Չիսելսկու համակարգերի համար վերոհիշյալ պնդումները:

Մարտինգալ-տարբերություն համակարգեր

Թեորեմ (Կարագուլյան)

Կամոնտ-Կարագուլյանի թեորեմի պնդումը ճիշտ է կամայական մարտինգալ-տարբերություն համակարգերի համար:

Grigori A. Karagulyan, On systems of non-overlapping Haar polynomials, Ark. Math. 58 (2020), no. 1, 121–131.

Եռանկյունաչափական և Ուոլշի համակարգեր

Եռանկյունաչափական և Ուոլշի համակարգերը ունեն միանգամայն այլ կառուցվածք և ամենևին նման չեն վեյվելետային համակարգերին: Դրանց համար UC -բազմապատկիչների խնդիրը դրվել է 1964 թվականին Ուլյանովի կողմից, և մինչև այսօր այդ խնդիրը չի գտել իր վերջնական լուծումը:

Ուոլշի համակարգի համար UC -բազմապատկիչների ներքևից գնահատականը դիտարկվել է մի շարք հեղինակների կողմից: Նարկայումս լավագույն արդյունքը գրանցվել է Բոչկարյովի և Նակատայի աշխատաններում 1979 թ: Այն ասում է, որ եթե $w(n)$ աճող հաջորդականությունը չի բավարարում Ուլյանովի (5) պայմանին, ապա այն չի կարող լինել UC-բազմապատկիչ Ուոլշի համակարգի համար: Եռանկյունաչափական համակարգի համար Ուլյանովի խնդիրը ևս դիտարկվել է մի շարք աշխատանքենում, սակայն Բոչկարյով-Նակատայի թեորեմի անալոգը ստացվել է վերջերս հետևյալ աշխատանքում.

G.Karagulyan, On Weyl multipliers of the rearranged trigonometric system, Sbornik Mathematics 211 (2020), no. 12, 1704-1736

Մաքսիմալ անհավասարություն

Թեորեմ (Կարագուլյան)

Գոյություն ունի $\{1, 2, \ldots, N\}$ *թվերի վերահամարակալում* $\{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$, *այնպիսին, որ*

$$\sup_{\|a_k\|_2 \le 1} \left\| \max_{1 \le m \le N} \left| \sum_{k=1}^{m} a_k e^{in_k x} \right| \right\|_2 \sim \log N.$$

Մաքսիմալ օպերատորներ

Մաքսիմալ օպերատորների նորմային գնահատականները հարմոնիկ անալիզի կարևորագույն ուղղություններից է: Նման գնահատականները արդյունավետ գործիքներ են անալիզի, հավանականությունների տեսության, մաթեմատիկական վիճակագրության և դիֆերենցիալ հավասարումների որոշակի խնդիրների ուսումնասիրություններում: Մաքսիմալ օպերատորները հաճախ անմիջականորեն առաջանում են որոշ կիրառական խնդիրներից և իրենցից ներկայացնում են վերջավոր կամ անվերջ քանակով ընդհանուր բնույթի օպերատորների մաքսիմալացում: Այսպես՝ մաքսիմալ օպերատորը, որը ծնվում է L^p-ում որոշված T_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, այս կամ այն ընդհանրության օպերատորներից, տրվում է որպես՝

$$T^*(f) = \max_{1 \le k \le N} |T_k(f)| :$$

Մաքսիմալ օպերատորներ

T_k օպերատորների հատուկ ընտանիքների դեպքում

$$\|T^*\|_{L^p \to L^p} \leq c(N) \max_{1 \leq k \leq N} \|T_k\|_{L^p \to L^p} . \tag{6}$$

տիպի գնահատականներում ակտուալ է $c(N)$ հաստատունի ասիմպտոտիկայի ուսումնասիրությունը: L^p-ում հավասարաչափ սահմանափակ ընդհանուր օպերատորների դեպքում $c(N) \leq N^{(p-1)/p}$ գնահատականը լավագույնն է, որ կարելի է սպասել (6) գնահատականի մեջ: Հատուկ բնույթի օպերատոր հաջորդականությունների համար $c(N)$ հաստատունի աճը կարող է լինել լոգարիթմական, որը կարող է էական դեր խաղալ որոշակի կիրառական խնդիրների ուսումնասիրություններում:

Մենշով-Ռադեմախերի անհավասարությունը

Նման երևույթի տիպական օրինակ է Մենշով-Ռադեմախերի հետևյալ անհավասարությունը

$$\left\| \max_{1\le m\le N} \left| \sum_{k=1}^{m} a_k(f)\phi_k \right| \right\|_2 \le c\cdot \log(N+1)\,\|f\|_2\,, \tag{7}$$

Կալդերոն-Զիգմունդի օպերատորներ

Թեորեմ (G.Karagulyan, M. Lacey, 2021)

Եթե T_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, հավասարաչափ սահմանափակ պարամետրերով Կալդերոն-Զիգմունդի օպերատորներ են, ապա

$$\| \max_{1 \le k \le N} |T_k(f)| \|_{L^p \to L^p} \lesssim \log N, \quad 1 < p < \infty.$$

Grigori A. Karagulyan, Michael T. Lacey, On logarithmic bounds of maximal sparse operators, Mathematische Zeitschrift, 294 (2020), no. 3-4, 1271–1281.

$\sqrt{\log N}$-գնահատականներ

Կալդերոն-Զիգմունդի որոշ մասնավոր դեպքերի համար այս գնահատականում $\log N$ արտադրիչը կարելի է փոխարինել $\sqrt{\log N}$-ով:

[1] Loukas Grafakos, Petr Honzík, and Andreas Seeger, On maximal functions for Mikhlin-Hörmander multipliers, Adv. Math. 204 (2006), no. 2, 363–378.
[2] Ciprian Demeter and Francesco Di Plinio, Logarithmic Lp bounds for maximal directional singular integrals in the plane, J. Geom. Anal. 24 (2014), no. 1, 375–416.
[3] Anna Kamont and Grigori A. Karagulyan, On wavelet polynomials and Weyl multipliers, J. d'Analyse Mathematique 150 (2023), no. 2, 529–545.

Թեորեմ (G.Karagulyan, M.Lacey, Kh.Navoyan, 2025)

Եթե T_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, Կալդերոն-Զիգմունդի օպերատորներ են, որոնք ունեն երկուական ներկայացում հավասարաչափ սահմանափակ պարամետրերով, ապա

$$\| \max_{1 \le k \le N} |T_k(f)| \|_{L^p \to L^p} \lesssim \sqrt{\log N}, \quad 1 < p < \infty.$$

Grigori A. Karagulyan, Michael T. Lacey, and Khazhakanush Navoyan, Maximal Caldéron-Zygmund operators and Weyl multipliers, Math. Sbornik 216 (2025), no. 10, 42-61.

Հեղևանք

Հեղևանք (G.Karagulyan, M.Lacey, Kh.Navoyan,)

Դիցուք

$$P_m(x) = \sum_{k=2^k+1}^{2^{k+1}} c_k e^{2\pi i k \cdot x}, \quad x \in \mathbb{T}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

օրթոնորմավորված եռանկյունաչափական բազմանդամներ են: Այդ դեպքում Ուլյանովի պայմանը անհրաժեշտ ու բավարար է $\{P_n\}$ համակարգի համար UC*-բազմապատկիչ լինելու համար:*

Խինչինի անհավասարություն

Դիցուք $\{r_n\}_{n\geq 1}$ Ռադեմախերի համակարգն է կամ նույնն է ասել $P\{f=1\}=P\{f=-1\}=1/2$ պայմանով անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը: Խինչինի անհավասարությունը ասում է, որ $0<p<\infty$, պարամետրի համար գոյություն ունեն A_p, B_p հաստատուններ, այնպիսիք, որ

$$A_p\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(x)\right\|_p \leq B_p\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}, \tag{9}$$

ցանկացած $\{a_n\}\in l^2$ հաջորդականության համար: Այս անհավասարության առաջին հատուկ դեպքը դիտարկվել է Խինչինի կողմից 1923թ, և ապացուցվել, որ (9) անհավասարությունը ճիշտ է $B_p=\sqrt{p/2+1}$ հաստատունով $p\geq 2$ պարամետրերի համար:

Խինչինի անհավասարության ընդհանրացումներ

Խինչինի տիպի անհավասությունն ու նրա ընդհանրացումները լայն կիրառություն ունեն մաթեմատիկայի մի շարք բնագավառներում (հարմոնիկ անալիզ, հավանականությունների տեսություն, երկրաչափություն): Հարմոնիկ անալիզում դրանք կիրառվում են տարբեր բնույթի քառակուսային ֆունկցիաների կամ այլ կերպ ասած Պելիի տիպի ֆունկցիաների գծայնացման պրոցեդուրաներում, օրթոգոնալ համակարգերի ոչ պայմանական բազիսության և զուգամիտության հարցերում: Խինչինի անհավասարության որոշ ընդհանրացումներ ինչպիսիք են Հովթինգի, Մաք Դիարմիդի անհավասարությունները մարտինգալների համար, Բոնամի-Կիեների անհավասարությունը Ռադեմախեր քաոս համակարգերի համար, կարևորվում են հավանականությունների տեսության, վիճակագրության, բուլյան ֆունկցիաների անալիզի բնագավառներում:

Ճշգրիտ հաստատուններ

Այս անհավասարության հետագա ուսումնասիրություններում (Litlewood, Paley, Zygmund, Young, Szarek, Haagerup)գտնվել են A_p և B_p հաստատունների ճշգրիտ արժեքները՝

$$B_p = 2^{1/2}\big(\Gamma(p+1/2)/\pi\big)^{1/p}, \quad 2 < p < \infty,$$

և

$$A_p = \begin{cases} 2^{1/2-1/p} & \text{երբ} \quad 0 < p < p_0, \\ 2^{1/2}\big(\Gamma(p+1/2)/\sqrt{\pi}\big)^{1/p} & \text{երբ} \quad p > p_0, \end{cases}$$

Մարտինգալ-տարբերություններ

Սահմանում

$\{f_n\}$ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը անվանում են մարտինգալ-տարբերություն, եթե

$$\mathbb{E}(f_n|f_1,\ldots,f_{n-1}) = 0, \quad n \geq 2.$$

G.Karagulyan, On the best constants in Khintchine type inequalities for martingales, Proc. Amer. Math. Soc., in press

աշխատանքներում ստացվել են ճշգրիտ հաստատուններով Խինչինի անհավասարության ընդհանրացումը մարտինգալ տարբերություն համակարգերի համար $p \geq 3$ պարամետրերի դեպքում: Աշխատանքում առաջարկվել է մոտեցում, որը թույլ է տալիս մարտինգալներին վերաբերվող որոշ անհավասարություններ բերել Ռադեմախերի համակարգի պարզագույն դեպքի:

Սուբգաուսյան գնահատական

Նույն աշխատանքում նաև ստացվել է

$$E\left[\exp\left(\lambda\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{\|\mathcal{S}(d)\|_\infty}\right)^2\right)\right] \le \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}, \quad 0<\lambda<1/2 \tag{10}$$

գնահատականը, որտեղ d_k-ն կամայական մարտինգալ տարբերություն համակարգ է, իսկ $\mathcal{S}(d)$-ն նրա Չանգ-Վիլսոն-Վուլֆի տիպի քառակուսային ֆունկցիան: Այն ճշգրիտ է:

Ռադեմախեր քաոս համակարգեր

Խինչինի տիպի անհավասարությունը դիտարկվել է Ռադեմախեր քաոս համակարգերի (Ռադեմախերի ֆունկցիաների d-ական արտադրյալներով համակարգ) համար: Տրվել է Բոնամի-Կիեների անհավասարության նոր՝ կոմբինատոր ապացույց, որը նոր հնարավորություն է ստեղծել գտնելու Բոնամի-Կիեների անհավասարության ճշգրիտ հաստատունները, օգտագործելով "կրկնակի ծածկույթ" կոչված նոր կոմբինատոր օբյեկտները:

[1] Grigori Karagulyan and Vahe Karagulyan, Asymptotic Estimates for Double Coverings, J. Contemporary Math. Analysis 60 (2025), no. 4, 285–298
[2] Karagulyan, G. A. Sharp inequalities involving multiplicative chaos sums. Acta Math. Hungar. 173 (2024), no. 2, 340–351.

Published in 2025

[1] Robert M. Mnatsakanov, Rafk H. Aramyan, and Farhad Jafari, *Reconstructions of piecewise continuous and discrete functions using moments*, J. Math. Sci. (N.Y.) **289** (2025), no. 2, 188–199.

[2] Rafik Aramyan, *Inversion of the two-data spherical Radon transform with the centers on a plane*, J. Math. Anal. Appl. **548** (2025), no. 2, Paper No. 129512, 19, DOI 10.1016/j.jmaa.2025.129512.

[3] R. H. Aramyan, R. M. Mnatsakanov, E. Aramyan, L. Apinyan, and F. Jafari, *Reconstruction of a planar centrally symmetric convex domain by random chord distribution*, Lobachevskii J. Math. **45** (2024), no. 12, 5967–5974.

[4] Grigori Karagulyan and Vahe Karagulyan, *Asymptotic Estimates for Double Coverings*, J. Contemporary Math. Analysis **60** (2025), no. 4, 285–298, DOI https://doi.org/10.3103/S106836232570013X.

[5] Grigori Karagulyan, Michael Lacey, and Khazhakanush Navoyan, *Maximal Caldéron-Zygmund operators and Weyl multipliers*, Math. Sbornik **216** (2025), no. 10, 1-17, DOI https://doi.org/10.4213/sm10277.

[6] L.A. Khachatryan and B.S Nahapetian, *Gibbs scheme in the theory of random fields*, Ann. Henri Poincaré , posted on published online on Apr. 28, 2025, 27 pp., DOI 10.1007/s00023-025-01573-z.

[7] ———, *Transition energy fields in the method of correlation equations*, J. Contemp. Mathemat. Anal. **60** (2025), no. 4, 354-364, DOI 10.3103/S1068362325700128.

[8] S. Poghosyan and H. Zessin, *Central limit theorem for the particle number of classical gases. Local approach*, Journal of Mathematical Physics **66** (2025), no. 053306, 10 pp., DOI 10.1063/5.0205390.

Accepted

[1] Grigori A. Karagulyan, *On the best constants in Khintchine type inequalities for martingales*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (in press).

[2] G. Karagulyan and I. Petrosyan, *On a criterion for uniform distribution*, Funct. Approx. Comment. Math. , posted on 2025, DOI 10.7169/facm/250203-24-3.

[3] S. Poghosyan and H. Zessin, *Once more the Central Limit Theorem for the particle number of a Classical Gas*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (accepted).

ՇՆՈՐՀԱԿԱԼՈՒԹՅՈՒՆ